

Цифровая сортировка мод Лагерра-Гаусса по радиальному индексу при апертурном воздействии

Я.Е. Акимова¹, М.В. Брецько¹, Ю.А. Егоров¹, А.В. Воляр¹, В. В. Милуков¹

¹КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт, проспект Академика Вернадского 4, Симферополь, Россия, 295007

Аннотация. Представлена новая методика цифровой сортировки радиальных мод Лагерра-Гаусса (ЛГ) при постоянном топологическом заряде, возникающем в результате возмущения одиночных пучков ЛГ или их композиции диэлектрической диафрагмой с различными радиусами апертуры. Методика основана на цифровом анализе моментов интенсивности высших порядков. Диафрагма с круглым отверстием вызывает появление набора вторичных мод ЛГ с различными радиальными числами, которые характеризуются амплитудным спектром. Цифровой амплитудный спектр позволяет восстановить реальные моды ЛГ и найти меру неопределенности, вносимой возмущением, посредством информационной энтропии. Измерения показали, что степень корреляции отсортированных пучков составляет 0,92.

1. Введение

Одной из главных проблем обработки информационных данных для оптической связи и распределений квантовых ключей для криптографии является сортировка вихревых мод комбинированных вихревых пучков по радиальным n и азимутальным m квантовым числам. Решения данной проблемы, в основном, основаны на двух подходах. Первый подход включает использование дифракционных оптических элементов в сочетании с интерферометрическими устройствами и модуляторами (см., например, [1]). Второй предлагает использовать цифровую сортировку мод на основе моментов интенсивности высших порядков и позволяет значительно упростить оптические устройства и расширить их возможности (см., например, [2]). Данный подход был разработан и реализован только для сортировки лазерных пучков по их топологическому заряду. Целью нашего исследования является рассмотрение процесса цифровой сортировки мод Лагерра-Гаусса по радиальному индексу.

2. Теоретическая модель пучка и метод измерения

Модель сортировки мод ЛГ основана на возмущении лазерного пучка на обычной диафрагме с жесткими краями и круглым отверстием. Возмущение пучка приводит к широкому спектру вторичных мод ЛГ, поле которого можно представить для одного исходного пучка ЛГ как

$$\Psi_{m,n}(r, \varphi, R) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,n,k}(R) r^{|m|} L_k^{|m|}(2r^2) e^{im\varphi} \exp(-r^2) \quad (1)$$

где $r = \rho / w_0$, ρ, φ - полярные координаты, w_0 - перетяжка пучка, R - является нормированным радиусом диафрагмы, а амплитуда пучка описывается уравнением

$$C_{m,n,k} = \int_0^R \Psi(r, \varphi) \psi_{m,k}^*(r, \varphi) r dr / \int_0^\infty |\psi_{m,k}(r, \varphi)|^2 r dr, \quad (2)$$

а $\psi_{m,k}(r, \varphi)$ описывает комплексную амплитуду одиночного невозмущенного пучка ЛГ. Анализ распределения интенсивности $\mathfrak{I}_{m,n}(r, \varphi) = |\Psi_{m,n}(r, \varphi)|^2$ возмущенного пучка выполняется в фокальной плоскости сферической линзы с помощью моментов интенсивности, записанных в виде

$$J_{p,q} = \int_{\square^2} M_{p,q}(r, \varphi) \mathfrak{I}_{m,n}(r) dS, \quad (3)$$

где $M_{p,q}(r, \varphi)$ является функцией моментов интенсивностей, $p, q = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку распределение интенсивности $\mathfrak{I}_{p,q}(r)$ осесимметричная функция, функция моментов может быть приведена к виду $M_{p,q}(r)$. Выражение для моментов интенсивности в (3) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно квадратов амплитуд $C_{m,n,k}^2$ и перекрестных членов $2C_{m,n,k}C_{m,n,s}$, так как члены в правой части уравнения (3) зависят от квадратов амплитуд, перекрестных членов, а также факторов

$$j_{p,q} = \int_0^\infty r^{2m+1} M_{p,q} L_k^m(2r^2) L_s^m(2r^2) e^{-2r^2} dr, \quad (4)$$

которые легко можно вычислить. Левую часть уравнения можно измерить на эксперименте. Произведение экспериментально измеренного распределения интенсивности $\mathfrak{I}_{\text{exp}}(r)$ и функции моментов $M_{p,q}$, а так же интеграл в (3) можно найти экспериментально в сочетании с компьютерной обработкой, при условии, что $\mathfrak{I}(r) \rightarrow \mathfrak{I}_{\text{exp}}(r)$. Количество переменных в уравнениях определяется числом квадратов амплитуд $X_p = C_{m,n,k}^2$ и перекрестных членов $Y_p = 2C_{m,n,k}C_{m,n,s}$. Число квадратов амплитуд равно N , а число перекрестных амплитуд в распределении интенсивности определяется в виде двойной комбинации N , равной биномиальному коэффициенту $N!/(2!(N-2)!)$, выражение (4) можно записать в матричной форме \hat{j} . Тогда векторный столбец \mathbf{C} амплитуд мод и вектор-столбец моментов интенсивности \mathbf{J} связаны друг с другом линейным матричным отношением $\mathbf{C} = \hat{j}^{-1} \mathbf{J}$.

Поскольку круговая апертура не создает вторичных мод с различными топологическими зарядами m , орбитальный угловой момент возмущенного пучка остается постоянным. Однако, множественные вторичные моды возмущенного пучка ЛГ приводят к неопределенности состояния волнового поля, мерой которой является информационная энтропия (энтропия Шеннона) [3]. Информационная энтропия может быть представлена через квадраты амплитуд как

$$H_{m,n} = - \sum_{k=0}^N C_{m,n}^2(R, k) \log_2 C_{m,n}^2(R, k) > 0 \quad (5)$$

3. Эксперимент и обсуждение результатов

Измерения спектров амплитуд ЛГ мод проводились на экспериментальной установке, изображенной на рис. 1 статьи [4]. Типичные спектры модовых амплитуд $C_{m,n,k}$ и распределение энтропии $H_{m,n}$ для одного возмущенного пучка представлены на рисунке 1. На рисунке 1.а показано, что амплитудный спектр $C_{m,n}(k)$ ограничен радиальным модовым числом k , что позволяло нам использовать ограниченное количество членов в выражении (1) на эксперименте. Кроме того, знакопеременная форма спектра указывает на необходимость измерения не только квадратов амплитуд, но и смешанных амплитуд в распределении интенсивности. Колебательное распределение модовой амплитуды от радиуса диафрагмы на рисунке.1б иллюстрирует вклад моды с радиальным числом $k = 6$ в моду с радиальным числом

$n = 0$. Мера неопределенности $H_{m,n=0}(R)$ исходного состояния $n = 0$ увеличивается по мере того, как радиус диафрагмы (рисунок 1в) уменьшается из-за переноса энергии в моды более высокого порядка, а энтропия $H_{m,n=6}(R)$ для $n = 6$ на рисунке 1г быстро колеблется из-за перераспределения энергии между модами. Широкий модовый спектр, возмущенного единичного пучка ЛГ может вносить значительные изменения в спектр массива возмущенных пучков в каналах связи.

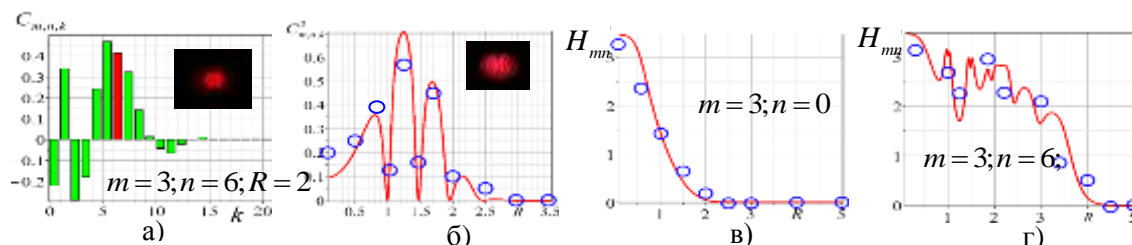


Рисунок 1. а) Спектр амплитуд $C_{m,n}$ пучка Лагерра-Гаусса, как функция от радиального числа k , б) вклад моды с радиальным числом $n = 6$ в моду с радиальным числом $k = 0$; энтропия $H_{m,n}(R)$ для состояний (в) $m=3, n=0$ и (г) для $m=3, n=6$; сплошные линии - теория, кружочки – эксперимент.

Мы провели серию экспериментального анализа и компьютерного моделирования модовых спектров для сортировки мод возмущенных пучков, содержащих сразу несколько мод ЛГ с различными радиальными числами n , но одинаковыми топологическими зарядами m , и обнаружили, что каждая мода в спектре вырождена, а число вырождения равно числу мод в исходном массиве пучков. Действительно, каждая мода в массиве из M пучков испытывает одно и то же возмущение от диафрагмы с жесткими краями, образующей свой широкий спектр мод. В результате каждая k -я мода в возмущенном спектре содержит суперпозицию M мод массива. Спектр становится вырожденным, а число вырождения каждой моды равно M . На рисунке 2а показан спектр мод для массива пучков с топологическим зарядом $m = 3$, содержащего три моды с радиальными числами $n = 0, n = 3$ и $n = 6$, возмущенных апертурой с радиусом $R = 2$. Каждая мода в спектре трижды вырождена. Начальные моды выделены красным. Вырождение мод влияет на сглаживание распределения энтропии на рисунке 1б (сравните с рисунком 1в,г). Так как моды с разными радиальными числами n являются независимыми, чтобы расшифровать спектр на рис. 2а, нужно иметь $M = 3$ ключей. В роли ключей выступают спектры $C_{m,n,k}(R)$ каждого одиночного возмущенного пучка ЛГ для радиуса апертуры R .

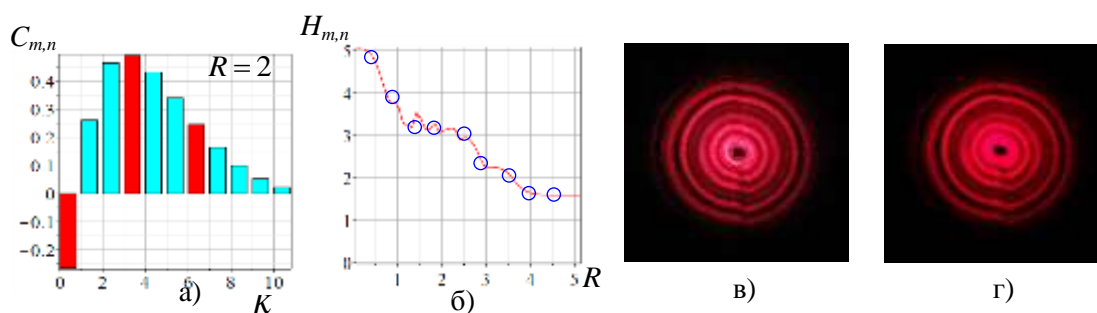


Рисунок 2. (а) Вырожденный амплитудный спектр $C_{m,n}(k)$, (б) распределение энтропии $H_{m,n}(R)$, (в) распределение интенсивности исходного пучка ЛГ и (г) распределение интенсивности восстановленного пучка ЛГ по экспериментальному спектру.

На рисунке 2в,г показаны экспериментальные распределения интенсивностей двух комплексных пучков: (в) перед сортировкой и (г) восстановленный по полученному экспериментальному спектру с $m = 3, n = 0, n = 3$ и $n = 6, R = 2$. Эти изображения были

сопоставлены друг с другом. Степень корреляции распределений интенсивности была $\eta = 0.92$, что превышало критическое значение $\eta = 0.9$, в то время, как степень корреляции единичного восстановленного пучка ЛГ после сортировки составляет около $\eta = 0.94$.

Представленная новая методика цифровой сортировки пучков позволяет существенно упростить известные авторам устройства для сортировки пучков по радиальным числам, поскольку позволяет удалять ряд оптических элементов из оптических устройств вместе со вспомогательными механическими и оптоэлектронными гаджетами. Кроме того, использование вырожденных возмущенных пучков позволяет использовать новые распределения квантовых ключей в системах криптографии, оптической связи и обработки данных.

4. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-01233.

5. Литература

- [1] Zhou, Y. Sorting Photons by Radial Quantum Number // *Phys. Rev. Lett.* – 2017. – Vol. 119.
- [2] Воляр, А.В. Секторное возмущение вихревого пучка: энтропия Шеннона, орбитальный угловой момент и топологический заряд / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров, В.В. Милуков // *Компьютерная оптика.* – 2019. – Т. 43, № 5. – С. 723-734. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.
- [3] Fransis, T.S.Yu. Entropy and information optics – New York: Marcel Dekker, 2000. – 348 p.
- [4] Воляр, А.В. Формирование и анализ спектров оптических вихрей сингулярных пучков с аномалиями орбитального углового момента / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика.* – 2019. – Т. 43, № 4. – С. 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.

Digital sorting of perturbed Laguerre-Gaussian modes by radial index

Ya.E. Akimova¹, M.V. Bretsko¹, Yu.A. Egorov¹, A.V. Volyar¹, V. V. Milyukov¹

¹V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Physical Technical Institute, Prospekt Vernadskogo 4, Simferopol, Russia, 295007

Abstract. We presented a new technique for digitally sorting Laguerre-Gaussian (LG) radial modes with a constant topological charge resulting from the perturbation of single LG beams or their composition by a dielectric diaphragm with different aperture radii. The technique is based on a digital analysis of higher-order intensity moments. Aperture with a round hole causes the appearance of a set of LG secondary modes with different radial numbers, which are characterized by an amplitude spectrum. The digital amplitude spectrum makes it possible to reconstruct the real LG modes and find the measure of the uncertainty introduced by the disturbance by means of information entropy. Measurements showed that the degree of correlation of sorted beams is 0.92.